

Cálculo Numérico

Interpolação e Diferenças Finitas

Tiago Matos Santos

Introdução

Em diversas ocasiões, temos que trabalhar com funções que são conhecidas apenas em um conjunto finito e discreto de pontos. Tais como as que são obtidas de forma experimental.

Introdução

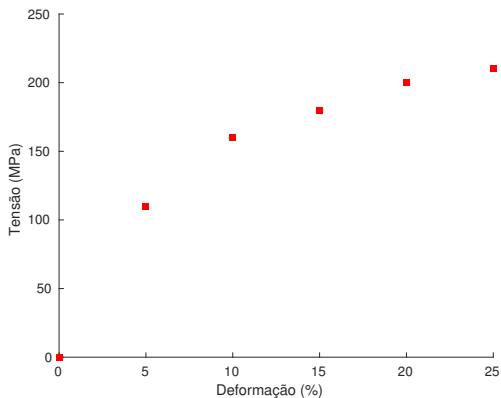
Exemplo de função tabelada.

Tabela: Valores do ensaio de tração para um material

Deformação ε (%)	Tensão σ (MPa)
0	0
5	110
10	160
15	180
20	200
25	210

Introdução

Figura: Gráfico dos pontos do ensaio de tração.



Introdução

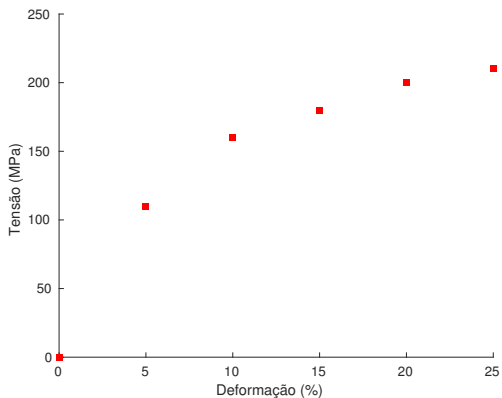
Em outros casos, dispomos de uma função analítica. Contudo, a mesma pode ter uma forma complicada.

Como neste exemplo para cálculo da vazão de fluidos por diferencial de pressão:

$$Q_m = \frac{\pi}{4} C_d Y_1 d^2 \sqrt{\frac{2\Delta P_\rho}{1 - \frac{d^4}{D^4}}}$$

Exemplo

Figura: Gráfico dos pontos do ensaio de tração.



Interpolação

- Seja a função $y = f(x)$ possuindo apenas um conjunto finito de pontos (x_i, y_i) definidos com $0 \leq i \leq N$
- Chamamos de interpolação o procedimento de obtenção do valor $f(\bar{x})$ quando $\bar{x} \in (x_0, x_N)$ mas $\bar{x} \neq x_i$
- Um polinômio interpolador pode servir como um aproximação para $f(x)$, e portanto ser utilizado na interpolação de seus valores.

Interpolação

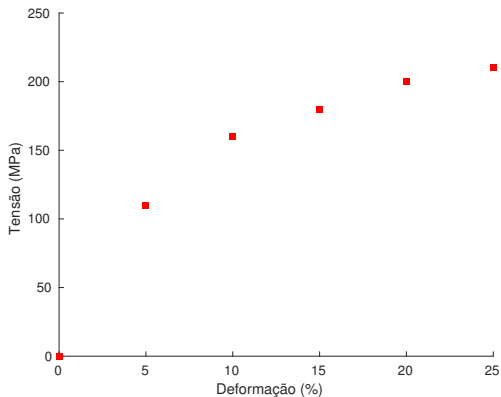
- Seja a função $y = f(x)$ possuindo apenas um conjunto finito de pontos (x_i, y_i) definidos com $0 \leq i \leq N$
- Chamamos de interpolação o procedimento de obtenção do valor $f(\bar{x})$ quando $\bar{x} \in (x_0, x_N)$ mas $\bar{x} \neq x_i$
- Um polinômio interpolador pode servir como uma aproximação para $f(x)$, e portanto ser utilizado na interpolação de seus valores.

Interpolação

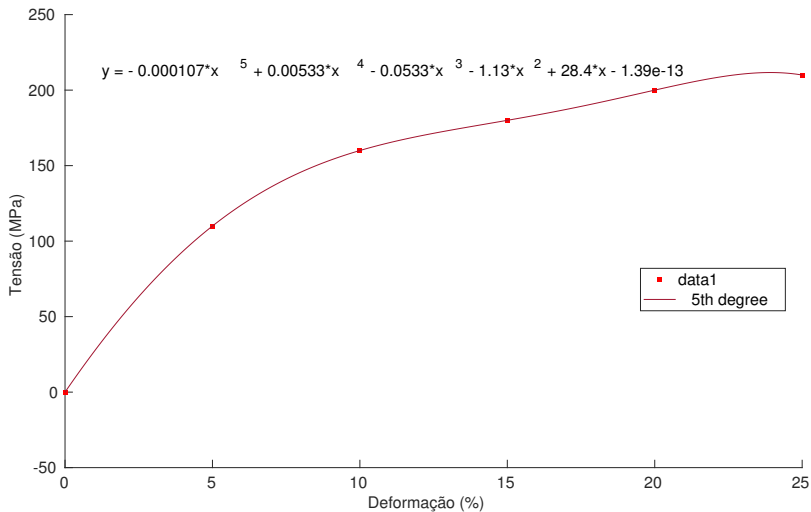
- Seja a função $y = f(x)$ possuindo apenas um conjunto finito de pontos (x_i, y_i) definidos com $0 \leq i \leq N$
- Chamamos de interpolação o procedimento de obtenção do valor $f(\bar{x})$ quando $\bar{x} \in (x_0, x_N)$ mas $\bar{x} \neq x_i$
- Um polinômio interpolador pode servir como um aproximação para $f(x)$, e portanto ser utilizado na interpolação de seus valores.

Exemplo

Figura: Gráfico dos pontos do ensaio de tração.



Exemplo



Extrapolação

- Seja a função $y = f(x)$ possuindo apenas um conjunto finito de pontos (x_i, y_i) definidos com $0 \leq i \leq N$
- Chamamos de extrapolação o procedimento de obtenção do valor $f(\bar{x})$ quando $\bar{x} \notin [x_0, x_N]$
- Este tópico está fora do escopo desta aula.

Extrapolação

- Seja a função $y = f(x)$ possuindo apenas um conjunto finito de pontos (x_i, y_i) definidos com $0 \leq i \leq N$
- Chamamos de extrapolação o procedimento de obtenção do valor $f(\bar{x})$ quando $\bar{x} \notin [x_0, x_N]$
- Este tópico está fora do escopo desta aula.

Interpolação Linear

Problema

Seja $y = f(x)$ definida apenas pelos pontos (x_0, y_0) e (x_1, y_1) , como calcular o valor $\bar{y} = f(\bar{x})$ quando \bar{x} é um valor entre x_0 e x_1 ?

Polinômio

- É possível provar que existe um polinômio interpolador de grau uma unidade menor que o número de pontos conhecidos da função.
- Logo, para o problema indicado (2 pontos), teremos um polinômio de grau 1:
- $P_1(x) = a_1x + a_0$

Polinômio

- É possível provar que existe um polinômio interpolador de grau uma unidade menor que o número de pontos conhecidos da função.
- Logo, para o problema indicado (2 pontos), teremos um polinômio de grau 1:
- $P_1(x) = a_1x + a_0$

Obtenção dos coeficientes

- Como os pontos (x_0, y_0) e (x_1, y_1) da função devem também pertencer à curva do polinômio $P_1(x)$
- Podemos estabelecer as seguintes equações:
 - $y_0 = f(x_0) = P_1(x_0) = a_1x_0 + a_0$
 - $y_1 = f(x_1) = P_1(x_1) = a_1x_1 + a_0$

Obtenção dos coeficientes

- Como os pontos (x_0, y_0) e (x_1, y_1) da função devem também pertencer à curva do polinômio $P_1(x)$
- Podemos estabelecer as seguintes equações:
 - $y_0 = f(x_0) = P_1(x_0) = a_1x_0 + a_0$
 - $y_1 = f(x_1) = P_1(x_1) = a_1x_1 + a_0$

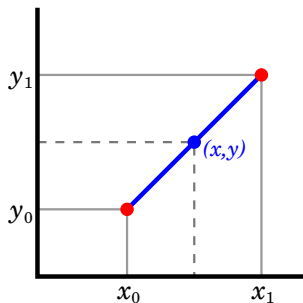
Obtenção dos coeficientes

- E restará resolver o sistema linear resultante para encontrar os coeficientes a_1 e a_0 :

$$\begin{cases} a_1 x_0 + a_0 = y_0 \\ a_1 x_1 + a_0 = y_1 \end{cases}$$

Ilustração

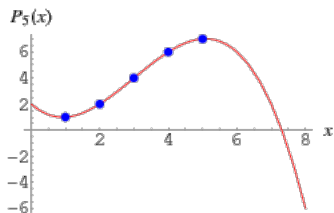
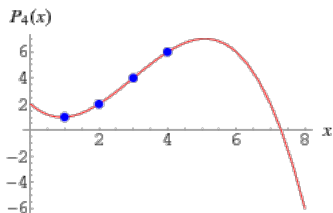
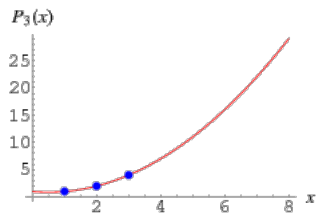
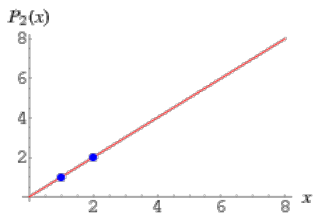
Figura: Interpolação linear.



Interpolação

- Podemos de forma semelhante, com um conjunto de 3 pontos para uma função, estabelecer um polinômio interpolador de grau 2:
- $P_2(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$
- Utilizaremos esta equação e cada um dos pontos para solucionar um sistema linear de ordem 3, que nos dará solução única para os coeficientes. Desde que os pontos sejam distintos dois a dois.

Interpoladores para diferentes conjuntos de pontos



Interpolação

De fato, poderemos estender este raciocínio para graus maiores, conforme o seguinte teorema.

Teorema

Sejam (x_i, y_i) com $i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$, $n + 1$ pontos tais que $x_i \neq x_j$ para $i \neq j$. Existe um polinômio $P(x)$ de grau não maior que n , tal que $P(x_i) = y_i$, para todo i , e este polinômio é único.

Demonstração

Para encontrar os coeficientes de

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

Poderemos montar um sistema de $n + 1$ equações em que utilizaremos cada ponto (x_i, y_i) dado para a função.

Interpolação

Demonstração

$$a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \cdots + a_nx_0^n = y_0,$$

$$a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \cdots + a_nx_1^n = y_1,$$

$$a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + \cdots + a_nx_2^n = y_2,$$

⋮

$$a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \cdots + a_nx_n^n = y_n.$$

Interpolação

Demonstração

Na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Demonstração

A matriz quadrada associada tem determinante

$$\prod_{i>j} (x_i - x_j)$$

Como os valores de x_i são diferentes quando tomados dois a dois, este determinante é não nulo e o sistema tem solução que é única. Portanto $P(x)$ existe e é único.

Fórmula de Lagrange para Interpolação

A seguinte fórmula nos permite obter um polinômio interpolador a partir de $n + 1$ pontos dados para uma função.

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \cdot \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

Exemplo

Para os pontos: $(2, 5)$, $(4, 7)$, $(6, 10)$

Diferenças Divididas

Diferença dividida de 1ª ordem

$$\delta^1 y_i = \delta y_i = f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

Ideia: Aproximação para derivada primeira quando se trabalha com seqüências discretas de pontos.

Diferenças Divididas

Diferença dividida de 2ª ordem

$$\delta^2 y_i = f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}$$

Diferenças Divididas

Diferença dividida de ordem n

$$\delta^n y_i = f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+n}] = \frac{f[x_{i+1}, \dots, x_{i+n}] - f[x_i, \dots, x_{i+n-1}]}{x_{i+n} - x_i}$$

Diferenças Divididas

De forma compacta:

$$\delta^n y_i = \frac{\delta^{n-1} y_{i+1} - \delta^{n-1} y_i}{x_{i+n} - x_i}$$

Considerando que:

$$\delta^0 y_i = f(x_i) = y_i$$

Interpolação por Newton com Diferenças Divididas

$$P_n(x) = y_0 + \sum_{i=1}^n \delta^i y_0 \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)$$

Exemplo

Para os pontos: $(2, 5)$, $(4, 7)$, $(6, 10)$

Diferenças Finitas

Conceito

- Em muitos casos, as funções a serem interpoladas apresentam valores das abscissas x_i igualmente espaçados.
- Isto é, $x_{i+1} - x_i = h$, para todo $i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$, sendo h uma constante.
- Podemos aproveitar este fato para simplificar a fórmula de Newton apresentada anteriormente.

Diferenças Finitas

Conceito

- De ordem zero: $\Delta^0 y_i = y_i$
- De 1ª ordem: $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i = \Delta^0 y_{i+1} - \Delta^0 y_i$
- De 2ª ordem: $\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i$
- De ordem n: $\Delta^n y_i = \Delta^{n-1} y_{i+1} - \Delta^{n-1} y_i$

Gregory-Newton

As diferenças divididas e as diferenças finitas podem ser relacionadas da seguinte forma:

$$\delta^n y_i = \frac{\Delta^n y_i}{n! h^n}$$

Isto nos permite efetuar uma modificação na fórmula de Newton para o polinômio interpolador.

Gregory-Newton

Que em conjunto com a substituição de variável: $z = \frac{x-x_0}{h}$

Nos leva à formula de interpolação para diferenças finitas de Gregory-Newton:

$$P_n(x) = y_0 + \frac{z}{1!} \Delta y_0 + \frac{z(z-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \dots \\ \dots + \frac{z(z-1) \dots (z-(n-1))}{n!} \Delta^n y_0$$

Exemplo

Para os pontos: $(2, 5)$, $(4, 7)$, $(6, 10)$ de $y = f(x)$

Achar o valor aproximado de y quando $x = 5$